

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГТД

Гишваров А.С., Максимов М.А., Чин Сыси

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа

При проведении экспериментальных исследований авиационных ГТД в некоторых случаях возникает потребность в оценке значений выходных величин изучаемого процесса, в тех точках пространства входных переменных, непосредственные измерения в которых невозможны или практически трудно осуществимы, например, ввиду высокой стоимости измерений в этих точках, из-за невозможности выделить полезный сигнал на фоне помех (мала эффективность измерения) и др. Может также возникнуть необходимость в оценке значения исследуемой величины в отдельных точках пространства входных переменных и получить математическое описание исследуемого процесса в некоторых областях пространства входных переменных, недоступных для непосредственного наблюдения.

Поставленная таким образом задача представляет собой задачу экстраполяции, поскольку решение ее предполагает экспериментальное исследование изучаемого процесса в доступной для непосредственных наблюдений области и распространение действия полученного уравнения связи на интересующие экспериментатора недоступные точки или области пространства входных переменных. При этом может решаться как задача определения значений исследуемой функции в некоторых точках, удаленных от интервала наблюдений, так и задача экспериментального исследования, когда интервал изменения входной переменной может оказаться разбитым на несколько отрезков, часть из которых доступна для проведения наблюдений, а другая – недоступна. Очевидно, что успешное решение задачи экстраполяции возможно при условии, что вид регрессионного уравнения сохраняется при переходе от области исследования к интересующей экспериментатора области пространства входных переменных.

Решение задач по прогнозной оценке характеристик ГТД возможно как с помощью пассивного, так и активного эксперимента. В последнем случае решение зависит от плана эксперимента и точек или области пространства входных переменных, в которых необходимо провести оценку.

Известные планы (ортогональные, ротатабельные, D-оптимальные и т. д.) экспериментального нахождения математического описания исследуемого процесса не являются оптимальными в смысле точности предсказания при решении задачи экстраполяции. Планы оптимальной

экстраполяции, позволяющие оценить значение исследуемой функции в точке пространства входных переменных с максимальной точностью, могут быть получены с помощью аналитических или численных методов [1].

Применение численных методов, в отличие от аналитических, позволяет решить задачу экстраполяции в точку или в область вне зависимости от числа входных переменных и вида регрессионного уравнения.

На практике часто уравнение регрессии  $\eta(x)$  линейно относительно неизвестных коэффициентов  $\theta_i$  и рассматривается в виде полинома

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x). \quad (1)$$

Задача экстраполяции состоит в определении такого плана  $\varepsilon^*$ , который бы обеспечил максимальную точность оценки регрессионного уравнения в прогнозной точке  $x_0$

$$d(x_0, \varepsilon^*) = \min d(x_0, \varepsilon); \quad d(x_0, \varepsilon) = f^T(x_0) C(\varepsilon) f(x_0), \quad (2)$$

где  $d(x_0, \varepsilon)$  - дисперсия прогнозного значения функции отклика в точке  $x_0$  для плана  $\varepsilon$ ;  $C(\varepsilon)$  - ковариационная матрица плана  $\varepsilon$ .

В случае экстраполяции в область  $z$ , недоступную для наблюдений, критериями оптимальности плана эксперимента являются величина максимальной или средней дисперсии по области предсказания [2]

$$d(x_z, \varepsilon^*) = \min_n \max_{x_z \in Z} d(x_z, \varepsilon); \quad (3)$$

$$\int_Z d(x_z, \varepsilon^*) dx_z = \min_n \int_Z d(x_z, \varepsilon) dx_z. \quad (4)$$

Экспериментальные исследования авиационных ГТД, как правило, связаны с большими материальными и временными затратами, поэтому на практике приходится ограничиваться точными планами  $\varepsilon_N$ , близкими к насыщенным ( $N \geq k$ , где  $N$  - число опытов,  $k$  - размерность уравнения регрессии)

$$d(x_0, \varepsilon_N^*) = \min d(x_0, \varepsilon_N). \quad (5)$$

Точный экстраполяционный план с числом наблюдений  $N \geq k$ , и содержащий точки спектра непрерывного плана может быть построен следующим образом:

1. Для заданного вида регрессионного уравнения выбирается насыщенный экстраполяционный план, содержащий точки спектра непрерывного оптимального экстраполяционного плана;

2. Если число наблюдений  $N > k$ , то к полученному насыщенному плану последовательно добавляется по одной точке спектра непрерывного плана так, чтобы на каждом шаге минимизировалось величина

максимальной по области экстраполяции дисперсии предсказания поверхности отклика. В случае экстраполяции в точку минимизируется величина дисперсии предсказания в этой точке.

Получение насыщенного экстраполяционного плана, содержащего точки спектра непрерывного плана, состоит в следующем:

1. Задается произвольная выборка объема  $k$  из спектра непрерывного экстраполяционного плана;

2. Каждая точка этой выборки последовательно замещается одной из оставшихся  $n - k$  точек спектра непрерывного плана. Окончательно в план включается та точка спектра, которая при замещении минимизирует максимальную дисперсию предсказания поверхности отклика в области экстраполяции;

3. Действия пункта 2 повторяются с полученной выборкой до тех пор, пока происходит уменьшение величины дисперсии предсказания.

Повторяя указанные действия с различными выборками из спектра непрерывного плана, можно получить насыщенный план, достаточно близкий к оптимальному.

Оставшиеся  $N - k$  наблюдений могут быть получены по процедуре непрерывного планирования экстраполяционных экспериментов. Для этого достаточно задать полученный насыщенный план в качестве начального и реализовать этап определения частот проведения наблюдений процедуры непрерывного планирования.

В случае, если непрерывный экстраполяционный план неизвестен, возможно последовательное улучшение некоторого начального, произвольно выбранного точного плана  $\varepsilon_N^0$ , содержащего заданное число опытов  $N$ .

Улучшение исходного плана может быть достигнуто отбрасыванием одной точки  $x_i$  из плана  $\varepsilon_N^0$  и последующей заменой ее на точку  $x_i^*$ , лучшую в смысле минимума дисперсии предсказания.

Итерационная процедура построения точных экстраполяционных планов состоит из следующих операций:

1. Выбирается произвольно некоторый невырожденный начальный план  $\varepsilon_N^0$  с заданным числом возможных наблюдений  $N$ ;

2. Отбрасывается одна точка  $x_i$  из плана  $\varepsilon_N^0$ . В результате получается план  $\varepsilon_{N-1}^0$ .

3. Определяется точка  $x^*$  пространства планирования, минимизирующая квадратичную форму в уравнении:

$$f^T(x_0) C(\varepsilon_N) f(x_0) = \min f^T(x_0) C[\varepsilon^{N-1} + \varepsilon(x)] f(x_0). \quad (6)$$



4. Полученная точка  $x^*$  добавляется в план  $\epsilon_{N-1}^0$ , и получается план  $\epsilon_N^1$ ;
5. Операции 2 – 4 повторяются с полученным в результате указанных действий планом  $\epsilon_N^1$ .

Экспериментальное исследование характеристик ГТД с применением точного G-оптимального планирования основано на следующих предпосылках:

- вид уравнения известен  $y = y(x, a)$ ;
- процесс, описываемый этой моделью, включает аддитивную помеху  $e$ :  
 $y = y(x, a) + e$ ;
- метод прогнозирования – метод наименьших квадратов;
- число наблюдений (объем испытаний) задается априорно.

**Пример.** Характеристика трехступенчатого компрессора вспомогательного газотурбинного двигателя ТА-6А описывается полиномом вида:

$$\pi_K^* = a_0 + a_1 n_{\text{пр}} + a_2 n_{\text{пр}}^2 + a_3 G_{\text{в.пр}} + a_4 n_{\text{пр}} G_{\text{в.пр}} + a_5 n_{\text{пр}}^2 G_{\text{в.пр}} + a_6 G_{\text{в.пр}}^2 + a_7 n_{\text{пр}} G_{\text{в.пр}}^2 + a_8 n_{\text{пр}}^2 G_{\text{в.пр}}^2, \quad (6)$$

где  $n_{\text{пр}}$  – приведенная частота вращения, в %;  $G_{\text{в.пр}}$  – приведенный расход воздуха, кг/с.

На предприятии изготовителе характеристика компрессора экспериментально определяется испытаниями двигателя на семи частотах вращения:  $n_{\text{пр}} = [37, 63, 74, 80,5, 93, 96, 99]^T$  %.

При этом экспериментальные точки распределяются равномерно. Снятие точек на режиме  $n_{\text{пр}} = \text{idem}$  обеспечивается варьированием количества воздуха, отбираемого за компрессором ( $G_{\text{отб}} = 0 \dots 1,4$  кг/с) и нагрузкой генераторов постоянного ( $N_{\text{гс}} = 0 \dots 12$  кВт) и переменного ( $N_{\text{гн}} = 0 \dots 80$  кВт) токов.

Общий объем снимаемых точек характеристики составляет 86 опытов.

В табл. 1 и 2 приведены результаты сравнения эффективности G-оптимального и равномерного планов эксперимента при прогнозировании значений  $\pi_K^*$  и  $G_{\text{в.пр}}$  в расчетную точку  $n_{\text{пр}} = 99\%$  и  $G_{\text{в.пр}} = 6,2$  кг/с, откуда видно переход на G-оптимальное планирование позволяет при неизменном объеме проводимых экспериментов ( $N = 86$  опытов) и количестве уровней по частоте вращения ( $N_n = 7$ ) повысить точность прогнозной оценки параметров компрессора в его расчетной точке в 6,5 раза.

Сравнение эффективности обоих методов планирования эксперимента (в качестве прогнозного рассматривался весь интервал частот вращения  $n_{\text{пр}} = 37 \dots 99\%$  и соответствующий ему интервал по расходу воздуха  $G_{\text{в.пр}} = 0,95 \dots 6,2$  кг/с) показало, что точность оценки параметров

# Сравнение эффективности G-оптимального и равномерного планов эксперимента

## Предлагаемый С-оптимальный план

Таблица 2

## Сравнение эффективности G-оптимального и равномерного планов эксперимента

№ п/п	Равномерный план							G- оптимальный план							$\frac{N_P}{N_G}$										
	Частота вращения (количество опытов)							Дисперсия оценки $d_p$	$N_p$	Частота вращения (количество опытов)							Дисперсия оценки $d_G$	$N_G$							
	1	2	3	4	5	6	7			1	2	3	4	5		6			7						
1	98 (86)	-	-	-	-	-	-	$6,0 \cdot 10^{13}$	86	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
2	93 (43)	99 (43)	-	-	-	-	-	$1,3 \cdot 10^{13}$	86	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
3	47 (28)	47,1 (29)	99 (29)	-	-	-	-	22,79	86	48,5 (7)	48,8 (4)	99 (21)	-	-	-	-	-	17,33	32	2,7	2,7				
4	37 (21)	37,3 (21)	99 (22)	99 (22)	-	-	-	12,79	86	37 (5)	40 (1)	41 (5)	99 (21)	-	-	-	-	12,33	32	2,7	2,7				
5	37 (17)	47,4 (17)	61 (17)	99 (17)	99 (18)	-	-	10,33	86	37 (4)	47,5 (1)	48 (2)	99 (3)	99 (10)	-	-	-	7,96	20	4,3	4,3				
6	37 (14)	47,7 (14)	61,4 (14)	99 (14)	99 (15)	99 (15)	-	8,11	86	37 (2)	38,5 (2)	39,8 (1)	44,1 (1)	99 (2)	99 (3)	-	-	8,90	11	7,9	7,9				
7	37 (12)	47,8 (12)	61,6 (12)	99 (12)	99 (12)	99 (13)	99 (13)	7,68	86	37 (1)	38,4 (1)	48,8 (1)	52,2 (2)	58,4 (1)	98,1 (1)	99 (4)	-	4,42	11	7,9	7,9				
План эксперимента, используемый на предприятии																						Предлагаемый G-оптимальный план			
8	37 (10)	63 (13)	74 (13)	80,5 (13)	93 (13)	96 (11)	99 (13)	16,35	86	37 (1)	38,4 (1)	48,8 (1)	52,2 (2)	58,4 (1)	98,1 (1)	99 (4)	-	4,42	11	7,9	7,9				



компрессора возрастает в 3,5 раза ( $d_p = 46,1$ ;  $d_G = 13,1$ ).

Представляло интерес решение задачи по уменьшению объема экспериментов при снятии характеристики компрессора, сохраняя при этом точность оценки его параметров неизменной. Для равномерного плана эксперимента, используемого на предприятии, дисперсия оценки параметров  $\pi_K^*$  и  $G_{в.пр}$  в расчетной точке равна 16,4 (при прогнозировании данных параметров в области  $n_{пр} = 37...99\%$  и  $G_{в.пр} = 0,95...6,2$  кг/с дисперсия равна 46,1). Применение G-оптимального плана позволяет при прогнозировании параметров компрессора в расчетную точку ( $n_{пр} = 99\%$  и  $G_{в.пр} = 6,2$  кг/с) уменьшить количество потребных опытов в  $N_p/N_G = 86/11 \approx 8$  раз. При прогнозировании в область  $n_{пр} = 37...99\%$ ,  $G_{в.пр} = 0,95... 6,2$  кг/с объем потребных опытов уменьшается в  $N_p/N_G = 86/48 \approx 1,8$  раза.

Таким образом, применение G-оптимального планирования эксперимента позволяет:

- уменьшить погрешность оценки параметров;
- уменьшить объем экспериментов при неизменной точности оценки.

#### Список литературы

1. Гишваров А.С. Оптимальное планирование экспериментов в задачах прогнозирования надежности ГТД/Сб.тр. АН РБ “Проблема машиноведения, конструкционных материалов и технологий”. Уфа, Гилем, 1997.
2. Налимов В.Н., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. М., «Металлургия», 1981.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА МР ПРИ ОБЪЕМНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Паровой Ф.В., Кузнецов Д.Ю., Котов А.С.,

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Цзян Хунюань, Ся Юйхун, Янь Хуэй

Харбинский политехнический институт, г. Харбин, КНР

Разработанный в 60-х годах нетканый проволочный материал МР (металлическая резина) [1] в настоящее время получил широкое распространение в технике и постоянно расширяет области применения.

В совместной Российско-Китайской лаборатории, развернутой на базе Харбинского политехнического института (КНР) при участии